1 Aufgabe

Ein Objekt mit der Masse m wird unter Einfluss der Schwerkraft am Aequator von einem Turm der Hoehe h fallen gelassen. Der Aufschlagpunkt an der Erdoberflaeche liegt auf Grund der Erddrehung nicht genau unterhalb des Startpunktes.

Berechnen Sie diese "Ablenkung", indem Sie zunaechst die Bewegungsgleichung in zylindrischen Koordinaten (ρ, ϕ, z) aufstellen. Loesen Sie anschliessend diese Bewegungsgleichung unter der Annahme, dass Terme mit ω^2 vernachlaessigt werden koennen (Warum?).

2 Loesung

Wenn das Objekt vom Turm faellt, so wirken auf dieses Objekt die Gewichtskraft $\overrightarrow{F_G}$, die Zentripetalkraft $\overrightarrow{F_Z}$, sowie die Corioliskraft $\overrightarrow{F_C}$.

Die Gesamtkraft $\overrightarrow{F_{ges}}$ ergibt sich durch Vektoraddition:

$$\overrightarrow{F_{ges}} = \overrightarrow{F_G} + \overrightarrow{F_Z} + \overrightarrow{F_C}$$

Der Betrag der Zentripetalkraft lautet:

$$F_Z = m\omega^2 r$$

Da auf der Erde das Quadrat der Winkelgeschwindigkeit $w^2 = \left(\frac{2\pi}{24 \cdot 3600s}\right)^2 \ll 1$ sehr klein ist, kann die Zentripetalkraft vernachlaessigt werden. Damit vereinfacht sich die Kraefteaddition zu:

$$\overrightarrow{F_{ges}} = \overrightarrow{F_G} + \overrightarrow{F_C}$$

$\overrightarrow{F_G}$ wirkt nur in ρ-Richtung, wohingegen $\overrightarrow{F_C}$ sowohl einen Anteil in ρ- als auch in ϕ-Richtung hat. Weiterhin laesst sich $\overrightarrow{v}$ in eine Kompontente v_ρ, welche in ρ-Richtung wirkt, und eine Komponente v_ϕ, welche analog dazu in ϕ-Richtung wirkt, zerlegen. Es gilt also fuer die Kraefte:

$$\overrightarrow{F_{ges}} = m \cdot \overrightarrow{a_{ges}} = m \begin{pmatrix} -g \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2m(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{\omega}) = m \begin{pmatrix} -g \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2m \left(\begin{pmatrix} v_\rho \\ v_\phi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -mg + 2mv_\phi\omega \\ -2mv_\rho\omega \\ 0 \end{pmatrix}$$

Fuer $\overrightarrow{a_{ges}}$ ergibt sich demnach:

$$\overrightarrow{a_{ges}} = \begin{pmatrix} -g + 2v_\phi\omega \\ -2v_\rho\omega \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da sich der Koerper im freien Fall bewegt, ergibt sich sein Ort, abhaengig von der Zeit mit $s_\rho(t) = R + h - \frac{1}{2}gt^2$, wobei R den Erdradius bezeichnet. Leitet man diese Funktion nun erst einmal und danach nochmals ab, so ergibt sich v_ϕ und a_ρ.

$$v_\rho(t) = -gt$$

$$a_\rho(t) = -g$$

Mit v_ρ ergibt sich fuer a_ϕ (ϕ-Komponente aus $\overrightarrow{a_{ges}}$):

$$a_\phi = -2v_\rho\omega = 2\omega gt$$

Integration nach der Zeit von 0 bis t liefert:

$$\int_0^t a_\phi \mathrm{d}t = \omega gt^2 = v_\phi(t)$$

Integriert man erneut nach der Zeit, ebenfalls von 0 bis t, so erigbt sich die Strecke in ϕ-Richtung, um die der Gegenstand abgelenkt wird:

$$\int_0^t v_\phi(t) = \frac{1}{3}\omega gt^3 = s_\phi(t)$$

Die Falldauer t_{Fall} des Gegenstands ergibt sich ueber die Formeln des freien Falls aus der Hoehe h, von der der Gegenstand fallen gelassen wird. Es gilt also $h = \frac{1}{2}gt_{Fall}^2$. Umgeformt nach der Zeit t_{Fall} ergibt sich fuer die Fallzeit:

$$t_{Fall} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Eingesetzt in $s_\phi(t)$ ergibt sich schlussendlich die Formel fuer die Ablenkung in ϕ-Richtung:

$$s_\phi(t_{Fall}) = \frac{2}{3}\omega h\sqrt{\frac{2h}{g}}$$